

---

## Contrôle continu 4

---

**Exercice 1** (4 pt). Considérons les deux sous-ensembles de  $M_2(\mathbb{R})$  suivants :

$$V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que  $V$  et  $W$  sont des sous-espaces vectoriels de  $M_2(\mathbb{R})$ .
2. Calculer les dimensions de  $V$  et  $W$ .
3. Est-ce que  $V$  et  $W$  sont supplémentaires ?
4. Soit  $S \subset M_2(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices  $A$  telles que  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $A$  (pour une valeur propre quelconque, *qu'on ne fixe pas*). Est-il un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 2** (6 pt). Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $M_2(\mathbb{R})$ .
2. Trouver une matrice inversible  $P \in M_2(\mathbb{C})$  et une matrice diagonale  $D \in M_2(\mathbb{C})$  telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

3. Calculer  $A^{2022}$  et  $A^{2023}$ .

**Exercice 3** (4 pt). Soit  $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$  l'espace vectoriel de polynômes d'ordre  $\leq 2$  et considérons l'application

$$\Psi: \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[X]; \quad \Psi(P)(X) = P''(2) \cdot (X^2 + 1) + P'(1) \cdot (X + 1) + P(0) \cdot (X^2 + X).$$

1. Montrer que  $\Psi$  est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de  $\Psi$  dans la base canonique  $\{1, X, X^2\}$ .
3. Calculer le déterminant de  $\Psi$ . L'application linéaire  $\Psi$  est-elle un isomorphisme ?

Tournez la page svp  $\rightarrow$

**Exercice 4** (6 pt).

1. Montrer que les trois vecteurs suivants forment une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Pour les trois vecteurs de la base canonique  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ , calculer leurs composantes dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  avec les trois propriétés suivantes :
- (a)  $\vec{u}$  est un vecteur propre de valeur propre  $-1$ .
  - (b)  $\vec{v}$  est un vecteur propre de valeur propre  $2$ .
  - (c)  $\Phi(\vec{w}) = (-3, -1, -1)$ .
4. En utilisant partie (2), montrer que la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer la troisième valeur propre de  $\Phi$ , ainsi que l'espace propre associé.

(*Indication* : il est possible de déterminer la troisième valeur propre sans calcul du polynôme caractéristique.)